Universidad Simón Bolívar.
Matemáticas V (MA-2112).
Preparaduría n° 5.
christianlaya@hotmail.com ; @ChristianLaya

Extremos relativos y multiplicadores de LaGrange

Punto	Definición
Máximo relativo o local	Se dice que la función $f(x,y)$ tiene un máximo relativo en un punto (a,b) si y sólo si existe una bola abierta con centro en el punto (a,b) tal que $f(a,b) > f(x,y)$ para todo (x,y) que pertenezca a dicha bola abierta.
Mínimo relativo o local	Se dice que la función $f(x,y)$ tiene un mínimo relativo en un punto (a,b) si y sólo si existe una bola abierta con centro en el punto (a,b) tal que $f(x,y) > f(a,b)$ para todo (x,y) que pertenezca a dicha bola abierta.
Máximo absoluto o global	Se dice que la función $f(x,y)$ *tiene un máximo absoluto si existe un punto* (a,b) tal que se cumpla que $f(a,b) > f(x,y)$ para todo (x,y) que pertenezca al dominio de $f(x,y)$.
Mínimo absoluto o global	Se dice que la función $f(x,y)$ tiene un mínimo absoluto si existe un punto (a,b) tal que se cumpla que $f(x,y) > f(a,b)$ para todo (x,y) que pertenezca al dominio de $f(x,y)$.

Los valores máximos y mínimos locales se denominan valores extremos de la función.

Condición necesaria para la existencia de un extremo: *si* f tiene un extremo relativo en el punto (a,b) y si existen las derivadas parciales $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ entonces se cumple que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

Puntos críticos: un punto (a,b) (perteneciente al dominio de f) será un punto crítico si y sólo si se satisface alguna de la siguientes condiciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \text{ y/o } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \text{ no existe}$$

Un punto crítico en donde f no alcance ni valor máximo ni mínimo se denomina punto de ensilladura.

Criterio de la Hessiana

El determinante de la Hessiana, será:

$$\mathrm{H}(a,b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

Donde (a, b) es un punto crítico.

- Si $\mathrm{H}(a, b) > 0$:
  - Si $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en (a, b) y vale $f(a, b)$.
  - Si $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en (a, b) y vale $f(a, b)$.
- Si $\mathrm{H}(a, b) < 0$ entonces (a, b) es un punto de ensilladura.
- Si $\mathrm{H}(a, b) = 0$ entonces no podemos concluir.

Si tenemos una función de tres variables $u(x, y, z)$, la Hessiana se calcula a través del siguiente determinante:

$$\mathrm{H}(u)_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

El cálculo de $\mathrm{H}(u)_2$ lo hacemos de forma similar:

$$\mathrm{H}(u)_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

El criterio entonces para la determinación de los extremos relativos, será el siguiente:

- Si $u_{xx}(a, b, c) > 0$, $\mathrm{H}(u)_2 > 0, \mathrm{H}(u)_3 > 0$, en (a,b,c) existe un mínimo relativo.
- *Si* $u_{xx}(a, b, c) < 0$, $\mathrm{H}(u)_2 > 0, \mathrm{H}(u)_3 < 0$, en (a,b,c) existe un máximo relativo.
- En cualquier otro caso, no hay extremo relativo.

1. Halle y clasifique todos los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^4 + 2y^4$.

<u>Solución</u>:

Por definición, los puntos críticos de una función son todos aquellos que anulen al gradiente de ésta.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 4x^3 = 0 \Longrightarrow 2x(1 - 2x^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 22y + 8y^3 \Longrightarrow 2y(1 + 4y^2) = 0$$

Obteniendo (de ambas ecuaciones) que:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teniendo entonces los puntos críticos:

$$P_1(0,0), \qquad P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \qquad P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Calculamos la Hessiana:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2-12x^2 & 0 \\ 0 & 2+24y^2 \end{pmatrix}, \qquad \det\big(H(x,y)\big) = (2-12x^2)(2+24y^2)$$

Clasifiquemos los puntos:

Punto	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$	$\mathbf{H}(x,y)$	**Conclusión**
$(0,0)$	2	2	0	4	*Mínimo local y vale* $f(0,0)=0$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	-4	14	0	-56	*Punto silla*
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	-4	14	0	-56	*Punto silla*

2. Sea $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$ (siendo k un número real cualquiera), determine los valores de la constante para los cuales:

- La función alcanza un punto de ensilladura en (0,0).
- La función alcanza un mínimo en (0,0).
- No se puede concluir.

Solución:

Calculamos el gradiente de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + ky = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kx + 2y = 0$$

Combinando las ecuaciones obtenemos que:

$$k\left(-\frac{ky}{2}\right) + 2y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}k^2y + 2y = 0 \Rightarrow -k^2y + 4y = 0 \Rightarrow y(-k^2+4) = 0$$

Obtenemos que $y = 0$, al sustituirlo en la primera ecuación determinamos que $x = 0$, por ende, el punto (0,0) es un punto crítico.

Calculamos la Hessiana:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det\big(H(x,y)\big) = 4 - k^2$$

- *Para que f alcance un punto de ensilladura se debe cumplir que* $4-k^2<0 \Longrightarrow k^2>4 \Longrightarrow |k|>2$, *es decir,* $k \in \{(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)\}$.
- *Para que f alcance un mínimo en (0,0) se debe cumplir que* $4-k^2>0 \Longrightarrow k^2<4 \Longrightarrow |k|<2$, *es decir,* $k \in (-2,2)$.
- *Para que no se pueda concluir, se debe cumplir que* $4-k^2=0 \Longrightarrow k=\pm 2$.

3. Halle y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y)=2x^4+y^4-4x^2-2y^2$.

<u>Solución</u>:

Hallamos los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=8x^3-8x=0 \Longrightarrow 8x(x^2-1)=0 \Longrightarrow x=0, \qquad x=\pm 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-4y=0 \Longrightarrow 4y(y^2-1)=0 \Longrightarrow y=0, \qquad y=\pm 1$$

Obteniendo así los puntos críticos:

$$\mathrm{P}_1(0,0), \quad \mathrm{P}_2(0,1), \quad \mathrm{P}_3(0,-1), \quad \mathrm{P}_4(1,0), \quad \mathrm{P}_5(-1,0), \quad \mathrm{P}_6(1,1), \quad \mathrm{P}_7(-1,-1)$$

$$\mathrm{P}_8(-1,1), \quad \mathrm{P}_9(1,-1)$$

Calculamos ahora la Hessiana:

$$\mathrm{H}(x,y)=\begin{pmatrix} 8(3x^2-1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) \end{pmatrix}, \qquad \det(H(x,y))=32(3x^2-1)(3y^2-1)$$

Clasificando:

Punto	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$	$\mathrm{H}(x,y)$	**Conclusión**
$(0,0)$	-8	-4	0	32	*Máximo local,* $f(0,0)=0$
$(0,1)$	-8	8	0	-64	*Ensilladura*
$(0,-1)$	-8	8	0	-64	*Ensilladura*
$(1,0)$	16	-4	0	-64	*Ensilladura*

Punto	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$	$\mathrm{H}(x,y)$	Conclusión
$(1,-1)$	16	8	0	128	*Mínimo local,* $f(1,-1)=-3$
$(-1,1)$	16	8	0	128	*Mínimo local,* $f(-1,1)=-3$
$(-1,-1)$	16	8	0	128	*Mínimo local,* $f(-1,-1)=-3$
$(-1,0)$	16	-4	0	-64	*Ensilladura*
$(1,1)$	16	8	0	128	*Mínimo local,* $f(1,1)=-3$

4. Estudie los extremos relativos de $z=f(x,y)$, dada de forma implícita por la ecuación:

$$F(x,y,z)=x^3+y^3-3x-3y+z^3+z+4=0$$

<u>Solución</u>:

Por regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{3(x^2-1)}{3z^2+1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{3(y^2-1)}{3z^2+1}$$

Tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \Longrightarrow -3(x^2-1)=0 \Longrightarrow x=\pm 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Longrightarrow -3(y^2-1)=0 \Longrightarrow y=\pm 1$$

Obteniendo así los puntos críticos de la función:

$$\mathrm{P}_1(1,1), \qquad \mathrm{P}_2(1,-1), \qquad \mathrm{P}_3(-1,1), \qquad \mathrm{P}_4(-1,-1)$$

Hallemos ahora las segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\left[\frac{-6x(3z^2+1)-6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(3(x^2-1)\right)}{(3z^2+1)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\left[\frac{-6y(3z^2+1)-6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(3(y^2-1)\right)}{(3z^2+1)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\left[\frac{-6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(3(y^2-1)\right)}{(3z^2+1)^2}\right]$$

Tenemos que:

- $\mathbf{P_1(1,1)}$:

$$1+1-3-3+z^3+z+4=0 \Rightarrow z=0$$

- $\mathbf{P_2(1,-1)}$:

$$1-1-3+3+z^3+z+4=0 \Rightarrow z^3+z+4=0 \Rightarrow z \approx -1.37$$

- $\mathbf{P_3(-1,1)}$:

$$-1+1+3-3+z^3+z+4=0 \Rightarrow z^3+z+4=0 \Rightarrow z \approx -1.37$$

- $\mathbf{P_4(-1,-1)}$:

$$-1-1+3+3+z^3+z+4=0 \Rightarrow z=2$$

Punto	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$	$\mathbf{H}(x,y)$	**Conclusión**
$(1,1)$	-6	-6	0	36	*Máximo local*
$(1,-1)$	0.90	0.39	0	0.351	*Mínimo local*
$(-1,1)$	-0.90	-0.39	0	0.351	*Máximo local*
$(-1,-1)$	-0.46	0.46	0	-0.21	*Ensilladura*

5. Halle los extremos relativos de la función:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+8xy-6xz-10yz+18y+20z$$

<u>Solución</u>:

Hallemos los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x+8y-6z=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y+8x-10z+18=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z-6x-10y+20=0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que:

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 3$$

Que representa el punto crítico $\mathrm{P}(1,2,3)$. *Procedemos ahora a hallar las derivadas de segundo orden:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -6, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -10$$

Es decir:

$$\mathrm{H}(f)_3 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 8 & 2 & -10 \\ -6 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 568 > 0, \qquad \mathrm{H}(f)_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -60 < 0$$

Tomando en cuenta que $f_{xx} > 0$ *concluimos que en dicho punto no existe ni un máximo ni un mínimo relativo.*

Teorema: toda función diferenciable en una región acotada y cerrada, alcanza su valor máximo o mínimo, o en un punto crítico, o en un punto frontera de la región.

Extremos relativos condicionados: método de los multiplicadores de LaGrange

Se llama extremo condicionado en el caso de una función $f(x, y)$, al máximo o mínimo de esta función, alcanzado con la condición de que sus argumentos estén ligados entre sí a través de una ecuación de enlace ($\varphi(x, y) = 0$).

Para hallar el extremo condicionado de la función $f(x, y)$, con la ecuación de enlace $\varphi(x, y) = 0$ se forma la llamada función de LaGrange:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 0$$

Donde λ es un multiplicador constante indeterminado, y se busca el extremo ordinario de esta función auxiliar.

Las condiciones necesarias para que haya extremo, se reducen al siguiente sistema de ecuaciones:

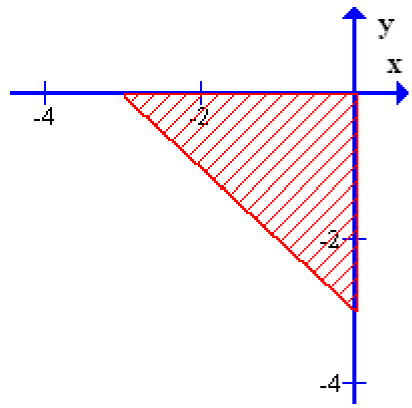
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Con tres incógnitas x, y, λ. Obviamente, la última de las ecuaciones anteriores, surge de derivar la función auxiliar de LaGrange, con respecto al multiplicador, esto es $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$.

6. Determine el valor máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ en la región $x \leq 0,\, y \leq 0,\, x + y \geq -3$.

<u>Solución</u>:

Graficamos la región:



La región es cerrada y compacta, esto nos garantiza que la función alcanza un valor máximo y/o mínimo dentro de ella.

Calculemos los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos el punto $\mathrm{P}(-1,-1)$ *que de hecho pertenece a la región. Clasifiquemos el punto:*

$$\mathrm{H}(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Y como $f_{xx} > 0$ *diremos que en el punto* $\mathrm{P}(-1,-1)$ *hay un mínimo relativo.*

Sabemos que los extremos absolutos de una función pueden presentarse en los puntos donde se encuentran los extremos relativos o en los puntos frontera de la región. A continuación, estudiaremos entonces, el comportamiento de la función en las fronteras de la región definida:

- *Si* $x = 0$ *entonces* $f(0,y) = y^2 + y$ *tal que* $-3 \leq y \leq 0$.
- *Si* $y = 0$ *entonces* $f(0,0) = 0$ *obteniendo el punto* $\mathrm{P}_1(0,0)$.
- *Si* $y = -3$ *entonces* $f(0,-3) = 6$ *obteniendo el punto* $\mathrm{P}_2(0,-3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}, \qquad f\left(0,-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}_3\left(0,-\frac{1}{2}\right)$$

- *Si* $y = 0$ *entonces* $f(x,0) = x^2 + x$ *tal que* $-3 \leq x \leq 0$.
- *Si* $x = 0$ *entonces* $f(0,0) = 0$ *obteniendo el punto* $\mathrm{P}_1(0,0)$.

- *Si* $x=-3$ *entonces* $f(-3,0)=6$ *obteniendo el punto* $\mathrm{P}_4(-3,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}, \qquad f\left(-\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}_5\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

- $x+y=-3$, *sustituyendo en la función obtenemos:*

$$f(x,-3-x)=3x^2+9x+6=3(x+2)(x+1)$$

Para obtener el valor extremo derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3(2x+3)=0, \qquad \mathrm{P}_6\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right), \qquad f\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

Luego, los extremos absolutos estarán situados en $\mathrm{P}(-1,-1)$, *el mínimo absoluto con* $f(-1,-1)=-1$; $\mathrm{P}_2(0,-3)$ *y* $\mathrm{P}_4(-3,0)$ *los máximos absolutos para* $f(0,-3)=f(-3,0)=6$.

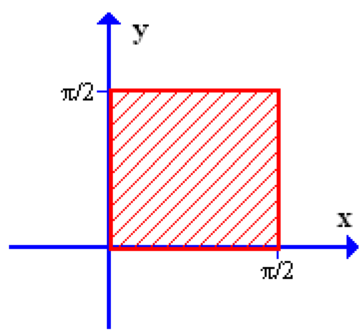
7. Determinar el máximo y el mínimo absolutos de la función:

$$f(x,y)=sen(x)+sen(y)+sen(x+y)$$

En la región $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$.

<u>Solución</u>:

Graficamos la región:



Determinamos los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(x)+\cos(x+y)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\cos(y)+\cos(x+y)=0$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos que:

$$\cos(x)-\cos(y)=0 \Rightarrow \cos(x)=\cos(y) \Rightarrow x=y$$

Al sustituirlo en la primera derivada parcial obtenemos que:

$$\cos(x)+\cos(2x)=0 \Rightarrow \cos(x)+2\cos^2(x)-1=0 \Rightarrow (\cos(x)+1)\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)=0$$

Obteniendo entonces:

$$\cos(x)+1=0 \Longrightarrow \cos(x)=-1 \Longrightarrow x=\arccos(-1) \Longrightarrow x=\pi$$

Y dado que $x=y$ *obtenemos el primer punto estacionario* $\mathrm{P}_1(\pi,\pi)$ *el cual queda descartado por no pertenecer a la región dada.*

$$\cos(x)-\frac{1}{2}=0 \Longrightarrow \cos(x)=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=\arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

Y dado que $x=y$ *obtenemos el segundo punto estacionario* $\mathrm{P}_2\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ *el cual pertenece a la región dada y debemos clasificarlo mediante el criterio de la segunda derivada.*

$$\mathrm{H}(x,y)=\begin{vmatrix} -sen(x)-sen(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -sen(y)-sen(x+y) \end{vmatrix}$$

Pero,

$$\mathrm{H}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\begin{vmatrix} -\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}=3-\frac{1}{4}>0$$

Y como $f_{xx}\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)<0$ *concluimos que la función alcanza un máximo local en* $\mathrm{P}_2\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

Estudiemos ahora el comportamiento de la frontera de la región (ésta es cerrada y compacta, lo que nos garantiza que la función alcance un máximo y/o un mínimo).

- *Si* $x=0$ *entonces* $f(0,y)=sen(y)+sen(y)=2sen(y)$ *tal que* $0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$
  - *Si* $y=0$ *entonces* $f(0,0)=0$ *obteniendo así el punto* $\mathrm{P}_3(0,0)$.
  - *Si* $y=\frac{\pi}{2}$ *entonces* $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=2$ *obteniendo así el punto* $\mathrm{P}_4\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2\cos(y)=0 \Longrightarrow y=\frac{\pi}{2}, \qquad f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=2, \qquad \mathrm{P}_4\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

- *Si* $x=\frac{\pi}{2}$ *entonces* $f\left(\frac{\pi}{2},y\right)=1+sen(y)+sen\left(\frac{\pi}{2}+y\right)$ *tal que* $0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$
  - *Si* $y=0$ *entonces* $f\left(\frac{\pi}{2},0\right)=2$ *obteniendo así el punto* $\mathrm{P}_5\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.
  - *Si* $y=\frac{\pi}{2}$ *entonces* $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=2$ *obteniendo así el punto* $\mathrm{P}_6\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Sustituimos en la función inicial $x=\frac{\pi}{2}$ *y obtenemos:*

$$f\left(\frac{\pi}{2},y\right)=1+sen(y)+sen\left(\frac{\pi}{2}+y\right) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\cos(y)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=0 \Longrightarrow \cos(y)-sen(y)=0$$

$$\Longrightarrow \cos(y)=sen(y) \Longrightarrow \cos^2(y)=sen^2(y) \Longrightarrow \cos^2(y)-sen^2(y)=0$$

$$\Longrightarrow \cos(2y) = 0 \Longrightarrow 2y = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

Obteniendo así el punto $\mathrm{P}_7\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ *con* $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + 1$.

- *Si* $y = 0$ *entonces* $f(x, 0) = 2sen(x)$ *tal que* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

- *Si* $x = \frac{\pi}{2}$ *entonces* $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2$ *obteniendo así el punto* $\mathrm{P}_5\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
- *Si* $x = 0$ *entonces* $f(0,0) = 0$ *obteniendo así el punto* $\mathrm{P}_3(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos(x) = 0 \Longrightarrow \cos(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Obteniendo así el punto $\mathrm{P}_5\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

- *Si* $y = \frac{\pi}{2}$ *obtenemos que* $f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = sen(x) + 1 + sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ *tal que* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- *Si* $x = 0$ *entonces* $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 2$ *obteniendo así el punto* $\mathrm{P}_4\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- *Si* $x = \frac{\pi}{2}$ *entonces* $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2$ *obteniendo así el punto* $\mathrm{P}_6\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Obteniendo así el punto $\mathrm{P}_8\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ *con* $f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \approx 1.79$.

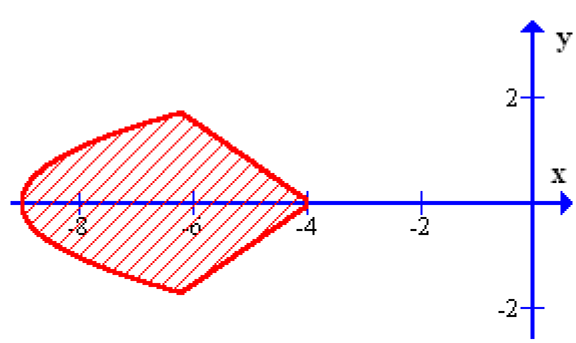
Finalmente, concluimos que en $\mathrm{P}_2\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ *con* $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ *existe un máximo absoluto y en* $\mathrm{P}_3(0,0)$ *con* $f(0,0) = 0$ *existe un mínimo absoluto.*

8. Halle los extremos absolutos de la función $f(x, y) = (x-2)^2 + y^2$ sobre la región:

$$\mathrm{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x \leq 9, \qquad 3x - 4y + 12 \leq 0, \qquad 3x + 4y + 12 \leq 0\}$$

<u>Solución</u>:

Graficamos la región:



Notamos que la región es cerrada y continua, esto nos garantiza que f alcance valores máximos y/o mínimos dentro de ella.

Buscamos los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-2) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

Combinando las ecuaciones obtenemos el punto crítico $\mathrm{P}_1(2,0)$, *el cual, no pertenece a la región y por ende lo descartaremos.*

Estudiamos ahora el comportamiento de la función a lo largo de la frontera:

- $3x - 4y + 12 = 0$, *tenemos que:*

$$f\left(x, \frac{1}{4}(3x+12)\right) = (x-2)^2 + \frac{1}{16}(3x+12)^2$$

Derivamos para obtener los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-2) + \frac{1}{8}(3x+12)(3) = 2x - 4 + \frac{9}{8}x + \frac{9}{2} = 32x - 16(4) + 18x + 72 = 0$$

$$\Longrightarrow 50x = -8 \Longrightarrow x = -\frac{4}{25}, \qquad \mathrm{P}_2\left(-\frac{4}{25}, \frac{72}{25}\right)$$

De hecho, el punto no pertenece a la región, por ende, no hay puntos críticos en esta frontera.

- $3x + 4y + 12 = 0$, *tenemos que:*

$$f\left(x, -\frac{1}{4}(3x+12)\right) = (x-2)^2 + \frac{1}{16}(3x+12)^2$$

Derivamos para obtener los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-2) + \frac{1}{8}(3x+12)(3) = 0 \Longrightarrow x = \frac{68}{35}, \qquad \mathrm{P}_3\left(\frac{68}{35}, -\frac{126}{25}\right)$$

De hecho, el punto no pertenece a la región, por ende, no hay puntos críticos en esta frontera.

- $y^2 - x = 9$, *tenemos que:*

$$f(y^2-9, y) = (y^2-11)^2 + y^2$$

Derivamos para obtener los puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y^2-11)(2y) + 2y = 0 \Longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{42}}{2}, \qquad y = 0$$

Obteniendo así los puntos críticos:

$$P_4\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{42}}{2}\right),\qquad P_5\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{42}}{2}\right),\qquad P_6(-9{,}0)$$

Donde le punto P_5 *no pertenece a la región.*

Ya que la región es compacta y cerrada garantizamos que f alcance valores máximos y mínimos dentro de ella. Asimismo, los vértices de la región son candidatos a máximos y/o mínimos. Estos son:

$$P_7(0{,}3),\qquad P_8\left(-\frac{56}{9},-\frac{5}{3}\right),\qquad P_9(0,-3),\qquad P_{10}\left(-\frac{56}{9},\frac{5}{3}\right),\qquad P_{11}(-4{,}0)$$

Después de hacer el estudio de la segunda derivada con cada uno obtenemos que los puntos $P_{11}(-4{,}0)$ *y* $P_{11}(-9{,}0)$ *son máximos absolutos.*

9. Dada la función $f(x,y,z)=x-2y-2z$, hallar los extremos condicionados con la restricción:

$$x^2+y^2+z^2=9$$

<u>Solución</u>:

Hallamos los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-2,\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-2$$

El gradiente nunca se anula y, por ende, la función no posee puntos críticos.

Sea la ecuación de enlace: $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$

Construimos la función de LaGrange:

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)=x-2y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-9)=0$$

Derivando:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1+2x\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{1}{2x},\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-2+2\lambda y=0\Longrightarrow\lambda=\frac{1}{y},\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=2+2\lambda z\Longrightarrow\lambda=-\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda}=\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0\ (\mathbf{1})$$

Combinando las ecuaciones e igualando los lambdas se obtiene que:

$$y=-z=-2x$$

Sustituyendo en **(1)** *obtenemos que:*

$$x^2+(-2x)^2+(2x)^2-9=0\Longrightarrow x^2+4x^2+4x^2-9=0\Longrightarrow 9x^2-9=0\Longrightarrow x^2-1=0$$

De donde se obtiene:

$$x = \pm 1, \qquad y = \mp 2, \qquad z = \pm 2$$

Encontramos los puntos estacionarios:

$$\mathrm{P}_1(1,-2,2), \qquad \mathrm{P}_2(-1,2,-2)$$

Evaluamos en la función:

$$f(1,-2,2) = (1) - 2(-2) + 2(2) = 9, \qquad f(-1,2,-2) = (-1) - 2(2) - 2(-2) = -9$$

Así, $\mathrm{P}_1(1,-2,2)$ *es un máximo global y* $\mathrm{P}_2(-1,2,-2)$ *es un mínimo global.*

10. Dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 + 2y^4$

- Clasifique los puntos críticos de la función.
- Calcule los máximos y mínimos globales de f en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución:

Calculamos los puntos críticos de la función:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4x^3 = 0 \Longrightarrow 2x(1 - 2x^2) = 0 \Longrightarrow x = 0, \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 8y^3 = 0 \Longrightarrow 2y(1 + 4y^2) = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Combinando las ecuaciones obtenemos los puntos críticos de la función:

$$\mathrm{P}_1(0,0), \qquad \mathrm{P}_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \qquad \mathrm{P}_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Calculando las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 12x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 24y^2, \qquad \mathrm{H}(x,y) = (2 - 12x)(2 + 24y^2)$$

Punto	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)}$	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)}$	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)}$	$\mathbf{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	**Conclusión**
$(0,0)$	2	2	0	4	*Mínimo local,* $f(0,0) = 0$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	-6.48	14	0	-90.72	*Ensilladura*
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	10.48	14	0	146.7	*Mínimo local,* $f(\mathrm{P}_3) = 1/4$

Veamos ahora el comportamiento de la función en el disco. Utilizaremos el método de los multiplicadores de LaGrange.

Identificamos la ecuación de enlace: $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Construimos la función auxiliar:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 + 2y^4 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Derivando:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 4x^3 + 2\lambda x = 0 \Longrightarrow 2x(1 - 2x^2 + \lambda) = 0 \Longrightarrow x = 0, \qquad \lambda = 2x^2 - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 8y^3 + 2\lambda y = 0 \Longrightarrow 2y(1 + 4y^2 + \lambda) = 0 \Longrightarrow y = 0, \qquad \lambda = -1 - 4y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Igualando las lambdas:

$$2x^2 - 1 = -1 - 4y^2 \Longrightarrow 2x^2 = -4y^2 \Longrightarrow x^2 = -y^2$$

Lo cual no tiene solución real. Así pues, los valores obtenidos son $x = 0$ e $y = 0$.

Si $x = 0$ *y sustituyendo en* $\varphi(x,y)$ *obtenemos los puntos* $\mathrm{P}_4(0,1)$ *y* $\mathrm{P}_5(0,-1)$.

Si $y = 0$ *y sustituyendo en* $\varphi(x,y)$ *obtenemos los puntos* $\mathrm{P}_6(1,0)$ *y* $\mathrm{P}_7(-1,0)$.

Evaluando en la función obtenemos:

$$f(\mathrm{P}_1) = 0, \qquad f(\mathrm{P}_3) = \frac{1}{4}, \qquad f(\mathrm{P}_4) = -1, \qquad f(\mathrm{P}_5) = -1, \qquad f(\mathrm{P}_6) = 3, \qquad f(\mathrm{P}_7) = 3$$

Entonces, se observa que P_4 *y* P_5 *son mínimos absolutos;* P_6 *y* P_7 *son máximos absolutos.*

11. Halle los valores extremos de $f(x,y,z) = 3x + y + 2z$ en la intersección de:

$$y^2 + z^2 = 2 \text{ y } x + z = 1.$$

<u>**Solución**</u>**:**

Veamos los puntos críticos estacionarios de la función:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por ende, la función no tiene puntos críticos.

La intersección de $y^2 + z^2 = 2$ con $x + z = 1$ es una curva cerrada de $\mathbb{R}^3$, la cual es un conjunto compacto y cerrado. Como f es una función polinómica (diferenciable y continua en todo $\mathbb{R}^3$) se garantiza que f alcance valores máximos y mínimos dentro de la curva.

Construimos la función auxiliar de LaGrange:

$$F(x, y, z, \lambda, \beta) = 3x + y + 2z + \lambda(y^2 + z^2 - 2) + \beta(x + z - 1) = 0$$

Derivando la ecuación:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3 + \beta = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z + \beta = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = y^2 + z^2 - 2 = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \beta} = x + z - 1 = 0$$

De lo que obtenemos:

$$\beta = -3, \qquad \lambda = -\frac{1}{2y}, \qquad \lambda = \frac{1}{2z}$$

Si combinamos e igualamos las λ obtenemos que $z = -y$. Sustituyendo esto en las restricciones obtenemos que:

$$y^2 + (-y)^2 - 2 = 0 \Longrightarrow y^2 + y^2 = 2 \Longrightarrow 2y^2 = 2 \Longrightarrow y = \pm 1$$

$$x + (-y) - 1 = 0 \Longrightarrow x - y = 1 \Longrightarrow x = 1 + y$$

Si $y = 1$ obtenemos el punto $\mathrm{P}_1(2,1,-1)$ y si $y = -1$ obtenemos el punto $\mathrm{P}_2(0,-1,1)$.

Evaluando en la función tenemos que $f(2,1,-1) = 5$ (máximo global) y $f(0,-1,1) = 1$ (mínimo global).

12. ¿En qué punto del círculo $x^2 + y^2 = 1$ la suma de $x + y$ es máxima?

Solución:

Lo que queremos optimizar es la función $f(x, y) = x + y$ bajo la restricción $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Construimos la función auxiliar de LaGrange:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Derivamos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Igualando las lambdas obtenemos la relación: $x = y$. La sustituimos en la ecuación de enlace:

$$x^2 + x^2 = 1 \Longrightarrow 2x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obteniendo así los puntos:

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \mathrm{P}_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \mathrm{P}_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \mathrm{P}_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Evaluando en la función, obtenemos que:

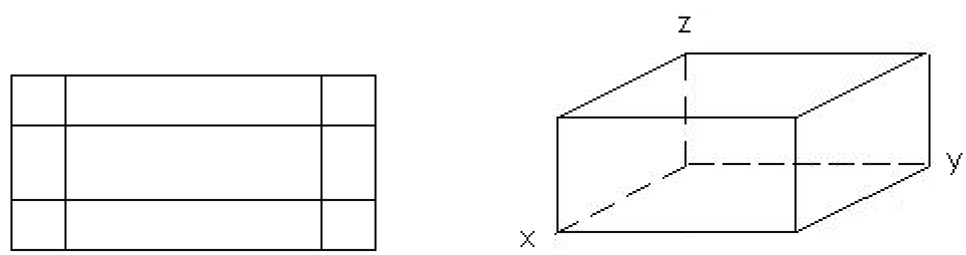
$$f(\mathrm{P}_1) = \sqrt{2}, \qquad f(\mathrm{P}_2) = 0, \qquad f(\mathrm{P}_3) = 0, \qquad f(\mathrm{P}_4) = -\sqrt{2}$$

Así pues, la suma será máxima en P_1 *y mínima en* P_4.

13. Determine las dimensiones relativas de una caja sin tapa y con volumen fijo V**,** si se quiere utilizar la mínima cantidad de material en su manufactura.

<u>Solución</u>:

Tenemos lo siguiente:



El ejercicio puede ser resuelto de dos maneras.

El volumen de la caja será:

$$\mathrm{V}(x, y, z) = xyz = \mathrm{V}$$

Mientras que la superficie de la misma sería (recordando que la caja no debe tener tapa):

$$\mathrm{S}(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz \ (\mathbf{1})$$

- **Primer método:**

Como el volumen es fijo (constante) y conocido, tenemos que:

$$z = \frac{\mathrm{V}}{xy}$$

Sustituyendo en **(1)** *tenemos:*

$$\mathrm{S}(x, y, z) = \mathrm{S}\left(x, y, \frac{\mathrm{V}}{xy}\right) = xy + 2x\left(\frac{\mathrm{V}}{xy}\right) + 2y\left(\frac{\mathrm{V}}{xy}\right) = xy + 2\frac{\mathrm{V}}{y} + 2\frac{\mathrm{V}}{x} \ (\mathbf{2})$$

Calculamos ahora los valores críticos de S:

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} = y - 2\frac{\mathrm{V}}{x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}x^2 y = \mathrm{V}, \qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y} = x - 2\frac{\mathrm{V}}{y^2} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}xy^2 = \mathrm{V}$$

Igualando obtenemos que:

$$\frac{1}{2}x^2 y = \frac{1}{2}xy^2 \Longrightarrow x^2 y = xy^2 \Longrightarrow x = y$$

Sustituyendo en la ecuación **(2)**:

$$\mathrm{S}(x) = x^2 + 2\frac{\mathrm{V}}{x} + 2\frac{\mathrm{V}}{x} = x^2 + 4\frac{\mathrm{V}}{x}$$

Derivando e igualando a cero para obtener los valores críticos:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2x - 4\frac{\mathrm{V}}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = 2\mathrm{V} \Longrightarrow x = \sqrt[3]{2\mathrm{V}} = y$$

Comprobamos ahora a través de la Hessiana:

$$\mathrm{H}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left(\sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \sqrt[3]{2\mathrm{V}}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\left(\sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \sqrt[3]{2\mathrm{V}}\right)\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\left(\sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \sqrt[3]{2\mathrm{V}}\right)\right)^2$$

$$= \left(\frac{4\mathrm{V}}{2\mathrm{V}}\right)\left(\frac{4\mathrm{V}}{2\mathrm{V}}\right) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Y como $f_{xx}\left(\sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \sqrt[3]{2\mathrm{V}}\right) > 0$ se cumple que $\left(\sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \sqrt[3]{2\mathrm{V}}\right)$ es un mínimo.

Las dimensiones de la caja para que ésta sea construida con la mínima cantidad de material, son:

$$x = \sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \qquad y = \sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \qquad z = \frac{\sqrt[3]{2\mathrm{V}}}{2}$$

- **Segundo método:**

Construimos la ecuación de enlace:

$$\varphi(x,y,z) = xyz - \mathrm{V} = 0$$

Construimos la función auxiliar de LaGrange:

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - \mathrm{V}) = 0$$

Derivando:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2z + \lambda xz = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y, z) = xyz - \mathrm{V} = 0$$

Despejando las λ:

$$\lambda = -\frac{y + 2z}{yz}, \qquad \lambda = -\frac{x + 2z}{xz}, \qquad \lambda = -\frac{2x + 2y}{xy}$$

Igualando:

$$\frac{y + 2z}{yz} = \frac{x + 2z}{xz} \Longrightarrow xy + 2xz = xy + 2yz \Longrightarrow xz = yz \Longrightarrow x = y$$

$$\frac{x + 2z}{xz} = \frac{2x + 2y}{xy} \Longrightarrow xy + 2yz = 2xz + 2yz \Longrightarrow xy = 2xz \Longrightarrow y = 2z$$

$$\frac{y + 2z}{yz} = \frac{2x + 2y}{xy} \Longrightarrow xy + 2xz = 2xz + 2yz \Longrightarrow xy = 2yz \Longrightarrow x = 2z$$

Sustituyendo en la ecuación de enlace (restricción):

$$xyz = \mathrm{V} \Longrightarrow (x)(x)\left(\frac{1}{2}x\right) = \mathrm{V} \Longrightarrow \frac{1}{2}x^3 = \mathrm{V} \Longrightarrow x = \sqrt[3]{2\mathrm{V}}$$

Las dimensiones de la caja, serán:

$$x = \sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \qquad y = \sqrt[3]{2\mathrm{V}}, \qquad z = \frac{\sqrt[3]{2\mathrm{V}}}{2}$$

14. El plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y se forma una elipse. Halle los puntos de la elipse que se encuentren más cercanos y más lejanos al origen.

<u>Solución</u>:

Lo que queremos optimizar es la distancia del origen a un punto genérico $\mathrm{P}(x, y, z)$:

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Restricciones:

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0, \qquad \rho(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

<u>Nota</u>: si una función es máxima su cuadrado también lo será. Es decir, optimizar la distancia del origen al punto P es equivalente a optimizar su cuadrado.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Utilizando el método de los multiplicadores de LaGrange:

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 1) + \mu(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Derivando:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda + 2\mu x = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda + 2\mu y = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 1 = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \mu} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Obteniendo así las ecuaciones:

$$2x = -\lambda - 2\mu x = 0, \qquad 2y = -\lambda - 2\mu y = 0, \qquad 2z = -\lambda$$

Suponiendo siempre que $\mu \neq -1$ *obtenemos que* $x = y$. *Sustituimos en las restricciones:*

$$2x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = y, \qquad z = 1 - 2x = 1 - 2\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \mp \sqrt{2}$$

Así pues, los puntos serán:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right), \qquad \mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$$

Sustituyendo en la función obtenemos que P es el valor más cercano mientras que Q es el valor más lejano.

15. Determine los triángulos de ángulos x, y e z, tal que $sen(x) + sen(y) + sen(z)$ sea máximo.

<u>Solución</u>:

Tenemos que:

$$f(x, y, z) = sen(x) + sen(y) + sen(z) = 0$$

Sabemos que (sea cual sea el triángulo) se cumple que la suma de los ángulos internos es 180°, es decir:

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z = 180º = \pi$$

Utilizando el método de los multiplicadores de LaGrange:

$$F(x, y, z, \mu) = sen(x) + sen(y) + sen(z) + \mu(x + y + z - \pi) = 0$$

Derivando:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x) + \mu = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = cos(y) + \mu = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \cos(z) + \mu = 0$$

Con lo que obtenemos: $\cos(x) = \cos(y) = \cos(z) \Longrightarrow x = y = z$ *y sustituyendo en la restricción obtenemos que:*

$$x + y + z = 3x = \pi \Longrightarrow x = y = z = \frac{\pi}{3}$$

Básicamente, triángulos equiláteros.

Se agradece la notificación de errores

Christian Laya